Algebra lineare – Esercizi del 2/10/08

(1) Dimostrare che ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, è prodotto di numeri primi.

(2) Dimostrare la regola di divisione euclidea: dati $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$ esistono unici $q, r \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq r < m$ tali che $n = q \cdot m + r$.

(3) Posto $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ per $n \geq 2$
e $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

- verificare direttamente che $x_n \in \mathbb{N}$ $\forall n$
- dimostrare che $x_n = f_n$

(4) Provare che

- $\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

- $\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(verificando preliminarmente che i membri destri appartengono a $\mathbb{N}$)

(5) Se $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$
$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$

trovare u, v tali che

$$F \cap G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : u(x,y) = 0\}$$
$$F \cup G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : v(x,y) = 0\}$$

(6) Dimostrare la regola di divisione tra polinomi: dati $f(x), g(x) \in R[x]$ con $\deg(g(x)) > 0$ esistono unici $q(x), r(x) \in R[x]$ tali che $0 \leq \deg r(x) < \deg g(x)$ e $f(x) = q(x) \cdot g(x) + r(x)$.

(7) Verificare che $D = \{0,1\}$ con le operazioni $+, \cdot$

$0+0 = 1+1 = 0$ 2) 3) $\quad 0+1 = 1+0 = 1$ 1) 4)

$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ 8) 7) $\quad 1 \cdot 1 = 1$ 5) 6)

è un campo.

Esercizi del 2-10-09

1) Dimostrare che ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, è prodotto di numeri primi

<u>passo base</u>: $n=2$ è primo

<u>passo induttivo</u>: suppongo che $P(m)$ vale $\forall m \leq n$ (hp. induttiva)

dimostro che $P(n+1) \Longleftrightarrow n+1$ è prodotto di numeri primi

se $\exists p \in \mathbb{N}$, $p \neq 1$, $p \neq n+1 \setminus p$ divide $n+1$

$\Rightarrow \exists q \neq 1, n+1 \setminus n+1 = pq$

$p, q < n+1$

per ipotesi induttiva p, q sono prodotto di numeri primi

$\Rightarrow n+1 = pq$ lo è.

3) Posto $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ per $n \geq 2$ e $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

verificare direttamente che $x_n \in \mathbb{N}\ \forall n$

dimostro che $x_n > 0$

se n è dispari allora abbiamo una differenza tra numeri positivi e negativi

che è sempre positiva perché $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

se n è pari allora osserviamo che

$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| > \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| \text{ e } \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right| > 1 \text{ allora } \left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|^n > \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^n$$

allora $x_n > 0$

Per dimostrare che $x_n \in \mathbb{N}$ uso la seguente che conosco già e la applico a x_n

$$a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{j=0}^{n-1} a^j b^{n-1-j}\right)$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^j\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1-j}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1+\sqrt{5}\right)^j \left(1-\sqrt{5}\right)^{n-1-j} =$$

Se n è dispari $(n = 2k+1) \Rightarrow \frac{1}{2^{n-1}}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left[(1+\sqrt{5})^j(1-\sqrt{5})^{n-1-j} + (1+\sqrt{5})^{n-1-j}(1-\sqrt{5})^j\right] +\right.$

$\left. + \left((1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})\right)^k\right] =$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left((1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) \right)^{j} \left[(1-\sqrt{5})^{n-1-2j} + (1+\sqrt{5})^{n-1-2j} \right] + (-1)^{k} 2^{2k} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j} 2^{2j} \left((1-\sqrt{5})^{n-1-2j} + (1+\sqrt{5})^{n-1-2j} \right) + (-1)^{k}$$

se è pari $(n = 2k)$: $\frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left((1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) \right)^{j} \left[(1-\sqrt{5})^{n-1-2j} + (1+\sqrt{5})^{n-1-2j} \right] = \right.$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j} 2^{2j} \underbrace{\left((1-\sqrt{5})^{n-1-2j} + (1+\sqrt{5})^{n-1-2j} \right)}_{\text{basta dim che è intero divisibile per } 2^{n-1-2j}}$$

per finire:

dimostro che $\forall a \in \mathbb{N}, a \geq 1$ $(1+\sqrt{5})^{a} - (1-\sqrt{5})^{a}$ è un numero intero divisibile per 2^{a}

dimostro che $x_n = f_n$

provo che $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

uso una variante: induzione completa (funziona per qualsiasi $P(n)$)

$Q(n)$: $P(k)$ è vera per ogni $k \leq n$

<u>fatto:</u> ($P(n)$ è vera $\forall n$) $\Longleftrightarrow$ ($Q(n)$ è vera $\forall n$)

dimostro $Q(n)$ per induzione

<u>passo base:</u> $Q(0)$: $f_0 = x_0$ vero perchè fanno 0.

$$Q(1): \begin{cases} x_0 = f_0 & \text{vera} \\ x_1 = f_1 & \text{vera perchè fanno 1 entrambi} \end{cases}$$

<u>passo induttivo</u> suppongo vera $Q(n)$ per qualche $n \geq 1$ e dimostro $Q(n+1)$

Noto che $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sono le radici dell'equazione $\lambda^2 = \lambda + 1$

so che $x(k) = f(k)$ per $k \leq n$ (hp induttiva)

devo vedere che $x_k = f_k$ per $k \leq n+1$ ovvero $x_{n+1} = f_{n+1}$

uso l'ipotesi induttiva per $k = n$ e $k = n-1$

$$f_n = x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^n - \lambda_2^n \right)$$

$$f_{n-1} = x_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \right)$$

ora ho:

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \right)$$

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^n - \lambda_2^n \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^{n-1} \underbrace{(1+\lambda_1)}_{\lambda_1^2} - \lambda_2^{n-1} \underbrace{(1+\lambda_2)}_{\lambda_2^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \right) \end{aligned}$$